DOI: 10.32517/0234-0453-2021-36-8-5-22

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ: МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭТИХ ЧИСЕЛ В ВЫЧИСЛЕНИЯХ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Я. Д. Сергеев[1,2] ✉

[1] ***Университет Калабрии, Козенца, Италия***

[2] ***Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия***

✉ *yaro@dimes.unical.it*

Аннотация

В статье описывается недавно предложенная методология, позволяющая работать с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами на компьютере. Подход использует ряд идей, сближающих его с современной физикой, в частности, обсуждаются относительность математического знания и его зависимость от инструментов, используемых математиками в своих исследованиях. Показывается, что появление новых вычислительных инструментов влияет на то, как мы воспринимаем традиционные математические объекты, а также помогает обнаружить новые интересные объекты и задачи. Приводятся аргументы, указывающие, что многие сложности и парадоксы, возникающие при работе с бесконечностью, не зависят от ее природы, а являются результатом слабости традиционных систем записи чисел, применяемых для работы с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. Предлагается система счисления, позволяющая не только работать с ними аналитически более простым и интуитивным способом, но и производить практические вычисления на Компьютере Бесконечности, запатентованном в ряде стран. Даются примеры измерения бесконечных множеств с точностью до одного элемента и показывается, что новая методология позволяет избежать появления некоторых известных парадоксов, связанных с бесконечностью. Приводятся примеры решения ряда вычислительных задач и обсуждаются некоторые результаты преподавания описываемой методологии в Италии и Великобритании.

Ключевые слова: бесконечно большие и бесконечно малые величины, гроссуан, Компьютер Бесконечности, численные вычисления с бесконечностью, философия математики, парадоксы бесконечности, преподавание математики, измерение бесконечных множеств, расходящиеся ряды.

Для цитирования:

Сергеев Я. Д. Новый взгляд на бесконечно большие и бесконечно малые величины: методологические основы и практическое использование этих чисел в вычислениях на компьютере. *Информатика и образование.* 2021;36(8):5–22. DOI: 10.32517/0234-0453-2021-36-8-5-22

A NEW LOOK AT INFINITELY LARGE AND INFINITELY SMALL QUANTITIES: METHODOLOGICAL FOUNDATIONS AND PRACTICAL CALCULATIONS WITH THESE NUMBERS ON A COMPUTER

Ya. D. Sergeyev[1,2] ✉

[1] ***University of Calabria, Cosenza, Italy***

[2] ***Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia***

✉ *yaro@dimes.unical.it*

Abstract

This article describes a recently proposed methodology that allows one to work with infinitely large and infinitely small quantities on a computer. The approach uses a number of ideas that bring it closer to modern physics, in particular, the relativity of mathematical knowledge and its dependence on the tools used by mathematicians in their studies are discussed. It is shown that the emergence of new computational tools influences the way we perceive traditional mathematical objects, and also helps to discover new interesting objects and problems. It is discussed that many difficulties and paradoxes regarding infinity do not depend on its nature, but are the result of the weakness of the traditional numeral systems used to work with infinitely large and infinitely small quantities. A numeral system is proposed that not only allows one to work with these quantities analytically in a simpler and more intuitive way, but also makes possible practical calculations on the Infinity Computer, patented in a number of countries. Examples of measuring infinite sets with the accuracy of one element are given and it is shown that the new methodology avoids the appearance of some well-known paradoxes associated with infinity. Examples of solving a number of computational problems are given and some results of teaching the described methodology in Italy and Great Britain are discussed.

Keywords: infinitely large and infinitely small quantities, grossone, Infinity Computer, numerical computations with infinity, philosophy of mathematics, paradoxes of infinity, teaching of mathematics, measurement of infinite sets, divergent series.

For citation:

Sergeyev Ya. D. A new look at infinitely large and infinitely small quantities: Methodological foundations and practical calculations with these numbers on a computer. *Informatics and Education.* 2021;36(8):5–22. DOI: 10.32517/0234-0453-2021-36-8-5-22 (In Russian.)

1. Введение

Информатика начала сильно влиять на математику и ее преподавание сразу же после появления первых вычислительных машин во второй половине прошлого века [1–8]. С течением времени и увеличением производительности компьютеров это влияние все больше усиливалось. Более того, мощные вычислительные инструменты и новые задачи, возникающие в информатике, не только подтолкнули развитие многих традиционных разделов математики, но и привели к возникновению совершенно новых ее областей, связанных, в первую очередь, с новыми вычислительными парадигмами, такими как, например, параллельные и квантовые вычисления [9–11]. Необходимость разработки и исследования алгоритмов для новых вычислительных машин, не обладающих привычной фон Неймановской архитектурой, привела к глубокому изменению как структуры вычислительных методов, так и самих математических объектов, с которыми производятся вычисления. Таким образом, можно смело сказать, что информатика и математика развиваются в тесном контакте, взаимно обогащая друг друга. Разработка суперкомпьютерных вычислительных инструментов, их влияние на понимание традиционных математических объектов и возможности, предоставляемые этими инструментами для решения математических задач, являются основным предметом обсуждения в данной статье.

Наряду с уже упоминавшимися параллельными и квантовыми компьютерами в последние годы большой интерес вызывает ***Компьютер Бесконечности (КБ)***, позволяющий автоматически производить численные (т. е. не символьные) расчеты с величинами, которые могут содержать различные бесконечно большие, бесконечно малые и конечные части. Этот интерес вызван несколькими факторами.

Во-первых, поскольку традиционные компьютеры могут работать численно только с конечными величинами, возможность проводить практические вычисления с бесконечными и бесконечно малыми числами, естественно, вызывает большой интерес.

Во-вторых, конструкция КБ была запатентована в нескольких странах [12], и существует его программный прототип, на котором уже проводятся практические вычисления в Европе и США. Это выгодно отличает КБ от широко обсуждаемых квантовых компьютеров, практическое создание которых с большим количеством q-битов представляется пока что достаточно туманным.

В-третьих, несколько групп логиков исследовали непротиворечивость математических оснований этой вычислительной парадигмы [13–16], показав надежность нового способа вычислений.

В-четвертых, методология КБ позволяет иначе взглянуть на целый ряд парадоксов и проблем, которые при традиционном видении бесконечности кажутся очень трудными или даже неразрешимыми [17–19].

В-пятых, преподавание новой вычислительной парадигмы позволяет существенно облегчить понимание студентами многих сложных математических понятий и объектов и упростить ряд трудоемких вычислений [20–22]. Например, с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами становится возможным работать численно на КБ, и появляется ряд понятных практических интерпретаций. Следует отметить, что в Англии уже существует сайт [23], посвященный преподаванию этой методологии, откуда можно скачать качественно разработанные методические материалы. Доступность для студентов новых концепций является сильным преимуществом КБ по отношению к нестандартному анализу [24], который (хотя он и работает с бесконечностью и бесконечно малыми величинами) не получил большого распространения в современном образовательном процессе [25] из-за его ярко выраженной теоретической направленности, невозможности избежать парадоксов и сложности для студентов.

В-шестых, были найдены многочисленные классы задач, в которых использование КБ и его вычислительной методологии позволило открыть новые интересные феномены и получить результаты, существенно превосходящие традиционные как с практической, так и с теоретической точек зрения.

К сожалению, недостаток места не позволяет нам указать все интересные приложения КБ и статьи, посвященные той или иной тематике. Упомянем только некоторые из них: математический анализ [18], теория вероятности [26, 27], теория игр [28–30], численное решение дифференциальных уравнений [31], численное дифференцирование [32], оптимизация [33, 34], философия математики [13, 14, 18, 35], фракталы [36] и т. д. Заметим также, что достаточно полная коллекция работ, содержащая несколько десятков статей, использующих методологию КБ в различных областях математики и информатики, доступна на сайте [12].

Настоящая статья представляет собой краткий обзор этой методологии, позволяющей не только выполнять вычисления на Компьютере Бесконечности, но и выработать новый взгляд на бесконечность, а также на другие математические объекты и математику в целом. Подход использует ряд идей, сближающих его с современной физикой, в частности, обсуждается относительность математического знания и его зависимость от инструментов, используемых математиками в своих исследованиях. Среди таких инструментов особое внимание уделяется различным системам записи чисел и сравнению их возможностей для практического выражения тех или иных чисел.

Отметим, что традиционно используемый в русском языке термин «система счисления» определяется как способ представления чисел с помощью письменных знаков и правил выполнения арифметических операций с ними. Присутствующее в термине слово «счисление» подчеркивает имеющийся в литературе (и в нашем сознании) сдвиг интереса в сторону «счисления», а не записи чисел. Как правило, в литературе по математике и информатике метод записи чисел после того, как он был введен, отходит на второй план и принимается молчаливое соглашение о том, что произвольное, например, целое, число может быть записано в любой известной системе счисления.

В настоящей работе подробно рассматривается второй аспект этого термина, а именно — различные способы записи чисел при помощи нумералов. Под ***нумералом*** в литературе понимается символ или группа символов, используемых для представления числа. Различие между нумералами и числами такое же, как между словами и идеями, которые выражаются словами, т. е. число есть концепция, которую выражает нумерал. Нумерал может быть написан или стерт, а число — нет. Одно и то же число может быть представлено различными нумералами, например, записи «4», «четыре», «IIII» и «IV» представляют собой различные нумералы, но все они выражают одно и то же число. Мы можем сказать, что системы нумералов принадлежат набору инструментов, который математики используют в своей работе, наблюдая при их помощи числа и объекты, построенные с использованием чисел.

В работе показывается, что различные системы записи чисел (различные инструменты) имеют разную точность и позволяют наблюдать разные множества чисел. Использование более развитой, более мощной системы нумералов дает возможность работать с большим набором чисел и получать более точные результаты. Оказывается, что многие вычислительные трудности, возникающие при работе с бесконечностью (например, расходимости, неопределенные формы, некоторые парадоксы и т. д.), не обусловлены природой бесконечности, а являются следствием слабости традиционных систем записи чисел. Предлагается новая система нумералов, позволяющая записывать большое количество бесконечно больших и бесконечно малых величин в явной форме конечным числом символов (что важно для проведения вычислений на практике). Предлагаемый подход позволяет построить простую и наглядную арифметику для выполнения вычислений не только с конечными числами, но и с бесконечно большими, и с бесконечно малыми величинами. Ввиду недостатка места мы представим здесь только краткое изложение методологии (более полное описание [18] доступно на сайте [12]).

Статья структурирована следующим образом. В разделе 2 мы проводим сравнительный анализ некоторых систем записи конечных чисел. Раздел 3 объясняет, почему необходимо по-новому взглянуть на бесконечность. Четвертый раздел посвящен новой методологии, которая послужит основой для введения в разделе 5 математического языка и системы счисления, позволяющих работать с бесконечными и бесконечно малыми величинами не только более простым и интуитивным способом, но и производить вычисления с ними на Компьютере Бесконечности. Также в этом разделе даются примеры измерения бесконечных множеств с точностью до одного элемента и показывается, что предложенная методология позволяет избежать появления некоторых известных парадоксов. Раздел 6 посвящен решению ряда вычислительных задач. Наконец, раздел 7 завершает статью, и в нем обсуждаются некоторые вопросы преподавания новой методологии.

2. Сравнительный анализ некоторых систем записи конечных чисел

Прежде чем мы займемся бесконечностью, полезно отметить, что различные системы записи чисел позволяют выражать *разные* множества чисел. Иными словами, неверно, что *любое* число может быть выражено в любой системе записи. Современная позиционная система записи позволяет легко записывать очень большие и очень маленькие положительные и отрицательные числа и достаточно легко выполнять арифметические операции с ними. Однако с исторической точки зрения ее появление произошло совсем недавно. Считается, что ноль был изобретен индийским ученым по имени Брахмагупта в VII веке и его введение привело к окончательному формированию позиционной системы записи*. Затем она стала использоваться в арабском мире и в 1202 году, когда вышла книга Леонардо Фибоначчи «Liber Abaci», этот способ записи и счета начал проникать

* Некоторые авторы вводят множество натуральных чисел, включая в него 0. Поскольку ноль был введен в практику вычислений сильно позже по сравнению с числами 1, 2, 3 и т. д., мы не будем включать его в множество натуральных чисел, определяя последнее как $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

в Европу, где получил повсеместное распространение только в XIV веке. Поскольку позиционная система является очень мощной, у многих людей возникает *иллюзия*, что при ее помощи можно записать *любое* число. Конечно, это не так. Например, она не позволяет записать число, имеющее 10^{100} различных цифр. Действительно, если мы будем писать со скоростью одна цифра в наносекунду (что очень быстро), запись такого числа займет 10^{91} секунд. Поскольку в году $31\,556\,926 \approx 3{,}1 \cdot 10^7$ секунд, чтобы выполнить эту запись, потребуется примерно $3{,}2 \cdot 10^{83}$ лет. Это довольно много времени. Как известно, современная физика предполагает, что возраст Вселенной составляет около 13,82 миллиарда лет, т. е. «всего» $1{,}382 \cdot 10^{10}$ лет.

До появления позиционной системы возможности записывать большие числа (и выполнять с ними операции) были еще более ограничены. Как следствие, количество чисел, которые можно было записать, было меньше. Например, греческая система записи использовала буквы греческого алфавита и не позволяла записывать большие числа. Эта проблема была хорошо понятна Архимеду, который в своей работе «Исчисление песка» (Псаммит) ввел специальные нумералы для выражения нужных ему больших чисел. Римская система записи удобнее греческой, но и она не позволяет записывать большие числа и имеет другие недостатки. Например, выполнение операции деления в ней затруднительно. Для нас очень важно также, что ни греческая, ни римская системы записи не позволяют выразить ноль и отрицательные числа. Это означает, что при использовании этих систем записи выражение II − V является неопределенной формой, если вычислитель не знает о существовании отрицательных чисел. Введение этих чисел вместе с нумералом, выражающим ноль, позволяет избежать появления неопределенных форм такого типа и расширить множество чисел, с которыми можно выполнять вычисления, на отрицательные числа.

Еще более ограниченной является унарная система записи, в которой число n представляется в виде суммы n черточек (или камешков, зарубок и т. п.). Очевидно, что в силу физических ограничений выполнять арифметические операции в этой системе чрезвычайно тяжело и в ней просто невозможно записать сколь-нибудь большое число. Вероятно, что операции умножения и деления даже не были определены в этой системе (попробуйте, например, разделить число |||||||||||||||||||||||||||||||||||||| на число |||||||||||||||||||||||||||||, используя только эту систему нумералов).

Существуют и еще более слабые системы записи. Обратимся к исследованию Питера Гордона из Колумбийского университета, опубликованному в журнале Science [37]. В этой работе описываются племя Пираха из Амазонии и их язык, который привлек большое внимание лингвистов [38–40]. Пираха живут в наши дни в Амазонии и используют очень простую систему нумералов для счета: один, два, много. Пираха не знают о существовании чисел больше двух, и у них такие операции, как 2 + 1 и 2 + 2, дают одинаковый результат, т. е. «много». Используя свою слабую систему нумералов, они не в состоянии «видеть» числа 3 и 4, не могут выполнять арифметические операции с ними и в целом не в состоянии сказать что-либо об этих числах, поскольку в их языке нет ни слов, ни концепций для этого.

Необходимо отметить, что записи 1 + 2 = «много» и 2 + 2 = «много» не являются неправильными. Они правильные в системе счета Пираха, не знающих о существовании чисел 3 и 4. Следует отметить, что и для людей, знающих о числах 3 и 4, ответ «много» тоже не является ошибочным. Он является *неточным* (аналогично, когда мы говорим, что в парке у нашего дома много деревьев, мы даем правильный, но неточный ответ). Для задач, решаемых Пираха, низкая точность ответа «много» является достаточной, и такой ответ успешно используется ими на практике. Однако, если мы нуждаемся в ответе более точном, чем «много», необходимо ввести нумералы для выражения чисел 3 и 4.

Как мы уже выяснили, любая система записи имеет числа, которые она не может выразить. Следовательно, для успешного выполнения арифметических операций необходимо, чтобы и операнды, и результат были выразимы в выбранной системе записи. Если результат операции не выразим *точно*, то возможны возникновение парадоксов (2 + 1 = «много») или хорошо знакомая программистам ситуация арифметического переполнения (overflow), когда при арифметическом действии результат становится больше максимально возможного значения M для переменной, использующейся для хранения результата. В этом случае вычисления останавливаются, поскольку не представляется возможным выразить результат операции. В программировании значение M хорошо известно, так как оно определяется размером памяти компьютера. В математике, как мы уже отмечали, это ограничение тоже существует, но на него обычно не обращают внимания.

Поскольку разные системы записи позволяют выразить разные множества чисел, существенным является тот факт, что не всегда возможно перевести точно число из одной системы нумералов в другую. Например, число 10 непредставимо в системе Пираха, его перевод «много» очевидно неточен. Наоборот, перевод «много» в позиционную систему просто невозможен, так как вместо числа мы получаем множество целых чисел $x > 2$. Можно привести и более привычный пример: результат операции $2 \cdot \pi$ невыразим в десятичной позиционной системе записи конечным числом символов. Подчеркнем, что мы говорим о практических вычислениях и, следовательно, при их выполнении мы можем произвести только конечное число операций, следовательно, мы будем не в состоянии записать число $2 \cdot \pi$, которое имеет бесконечное число цифр после запятой.

Другим моментом, на который следует обратить внимание при сравнении различных систем записи чисел, является невозможность смешивания в одном выражении нумералов, принадлежащих к различным системам записи. Например, выражение «много» + 5 не имеет смысла, поскольку для людей, знающих, что такое число 5, непонятно, что такое «много». И наоборот, для Пираха непонятно, что такое 5.

Подведем некоторые итоги этого раздела:

1) все существующие системы записи могут выражать только определенные множества чисел;
2) для любой системы записи можно указать числа, невыразимые в этой конкретной системе;
3) разные системы записи могут выражать разные множества чисел, и проблема точного перевода из одной системы в другую не всегда разрешима;
4) разные системы записи могут иметь разные алгоритмы для выполнения арифметических операций;
5) чем более развита система записи, тем больше чисел могут быть в ней представлены и тем легче выполнять арифметические операции с нумералами этой системы;
6) для выполнения некоторой операции необходимо, чтобы в системе записи были нумералы, позволяющие выразить как операнды, так и результат;
7) при фиксированной системе записи не все результаты арифметических операций могут быть выражены с одинаковой точностью;
8) введение в систему записи новых нумералов позволяет выразить большее количество чисел и может исключить из практики вычислений некоторые неопределенные формы.

3. Мотивация необходимости введения нового взгляда на бесконечность

Понятия бесконечно большого и бесконечно малого привлекали внимание многих выдающихся математиков, философов, физиков и теологов, которые пытались разгадать парадоксы бесконечности и бесконечно малых величин, ввести их в математическую практику и дать им строгие определения. Чтобы понять важность проблематики, достаточно упомянуть имена известных ученых, которые ею занимались: Зенон Элейский, Евдокс Книдский, Аристотель, Архимед, Галилео Галилей, Бонавентура Франческо Кавальери, Джон Уоллис, Исаак Ньютон, Готфрид Вильгельм фон Лейбниц, Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор, Дэвид Гильберт, Туллио Леви Чивита, Курт Гёдель, Пол Коэн, Абрахам Робинсон и др. Однако, несмотря на все усилия, мы все еще не можем сказать, что полностью поняли природу бесконечности.

Современная точка зрения на бесконечность начала формироваться около 150 лет тому назад в связи с фундаментальными результатами, полученными Георгом Кантором, который впервые показал, что существуют бесконечности, которые отличаются друг от друга, и одни бесконечности могут быть больше, чем другие. Его глубокие идеи сегодня являются классическими и относятся к основаниям математики. Однако, породив множество полезных и важных результатов, его подход приводит к ситуациям, которые кажутся нелогичными и парадоксальными для нематематиков.

Мы приведем только один пример, отмеченный уже Галилео Галилеем (хотя существует большое количество других парадоксов, связанных с бесконечностью: Гранд Отель Гильберта, который, кстати, подробно рассматривается на сайте [23], Лампа Томсона, парадокс Банаха—Тарского и т. д.). Рассматриваемый пример касается наблюдения, что можно установить взаимно однозначное соответствие между бесконечным множеством и некоторой его бесконечной частью. Галилей обнаружил эту ситуацию, рассматривая натуральные числа и их квадраты. Мы же упростим пример, рассмотрев натуральные и нечетные числа и записав их следующим образом:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{нечетные числа:} & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ \text{натуральные числа:} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \end{array} \qquad (1)$$

Таким образом, мы получаем, что нечетные числа, несмотря на то что они являются частью натуральных чисел, могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие со всеми натуральными числами. Этот результат очень трудно принять, поскольку наш повседневный опыт учит, что в окружающем мире целое всегда больше, чем его часть. Этот принцип «целое больше части» был сформулирован еще Евклидом в его «Началах» и введен как общепринятое понятие, не требующее каких-либо дополнительных доказательств. Традиционный способ объяснения ситуации (1) в школе (и не только в школе) говорит нам, что парадоксы, подобные этому, объясняются *природой* бесконечности и поэтому не должны соответствовать нашему повседневному опыту. Нас убеждают, что, столкнувшись с бесконечностью, мы должны вести себя иначе по сравнению с нашим математическим опытом, полученным в реальной жизни при работе с конечными величинами. Отсутствие понятных интерпретаций неизбежно ведет к тому, что преподавание математических концепций, связанных с бесконечностью, создает трудности для студентов.

Если мы обратимся к компьютерам, то сразу же заметим, что двоичная система записи позволяет нам проводить на компьютере вычисления с высокой точностью с конечными величинами, однако при работе с бесконечностью мы испытываем трудности. Существующие системы записи чисел не позволяют нам численно работать с бесконечными и бесконечно малыми величинами на компьютере, используя те же формальные правила, что и при работе с конечными числами (возможны только символьные вычисления). Среди причин, которые не позволяют нам работать численно, можно выделить как минимум следующие:

1) существование неопределенных форм (например, $\infty - \infty$, ∞ / ∞, $0 \cdot \infty$ и т. д.);

2) невыполнение уже упоминавшегося принципа «целое больше части» (действительно, для любого конечного x следует: $x + 1 > x$ и $x - 1 < x$, тогда как $\infty + 1 = \infty$ и $\infty - 1 = \infty$);
3) невозможность хранения бесконечного числа знаков в конечной памяти компьютера.

Нашей целью является не только разработка теории, но и решение прикладных задач на компьютере, способном выполнять на практике *численные* (не символьные) вычисления с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, используя те же формальные правила, которыми мы пользуемся при работе с конечными числами. Для того чтобы понять, каким образом можно сделать это, и выработать точку зрения на бесконечность, согласующуюся с принципом «целое больше части» (мы будем использовать его версию «часть меньше целого», следуя обзору [18]), вернемся к системе счисления племени Пираха и рассмотрим их правила сложения более детально:

$$\begin{gathered} 1+1=2, \\ 1+2=\text{много}, \\ 2+2=\text{много}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \text{много}+1=\text{много}, \\ \text{много}+2=\text{много}, \\ \text{много}+\text{много}=\text{много}. \end{gathered} \tag{3}$$

Обратим наше внимание на формулы (3). Если мы заменим в них нумерал «много» на символ бесконечности ∞, мы получим традиционные правила работы с бесконечностью

$$\begin{gathered} \infty+1=\infty, \\ \infty+2=\infty, \\ \infty+\infty=\infty, \end{gathered} \tag{4}$$

которые мы все узнали в школе. С этой точки зрения единственное различие между нами и Пираха состоит в том, что их бесконечность начинается «намного раньше», чем наша. Однако мы знаем, что, если вместо «много» мы введем нумералы для выражения 3, 4 и других конечных чисел, то это позволит нам различить результаты операций $1 + 2$ и $2 + 2$ и избежать ситуаций (2), (3). Это наводит на мысль о том, что, возможно, введение новых нумералов для выражения бесконечных (и бесконечно малых) чисел также сможет помочь избежать появления записей вида (4). Как мы увидим далее, это действительно так.

Таким образом, сравнение формул (2), (3) и (4) позволяет нам сделать следующее важное заключение:

> *Трудности, которые мы испытываем при работе с бесконечностью, не обусловлены ее природой, а являются следствием слабости традиционных систем записи чисел, имеющих слишком мало нумералов для выражения бесконечных чисел.*

Отметим, что арифметика Пираха не является изолированным случаем. Подобные способы счета присутствуют более чем в двух десятках языков с ограниченными системами числительных, не выходящих за пределы числа 20 [40, 41].

В связи с дискуссией о правилах работы с бесконечностью следует упомянуть также другое племя — Мундуруку, также описанное в журнале Science [42]. Эти люди имеют более продвинутую систему счета. Они могут различать числа 1, 2, 3, 4, 5, и у них есть два типа «много»: «много, но не очень», и «действительно много». Удивительно, но операции с этими двумя типами «много» чрезвычайно похожи на операции с кардинальными числами Кантора, где «много, но не очень» играет роль кардинала счетной бесконечности, $\aleph_0$, а «действительно много» — роль кардинала континуума, $\mathbf{c}$. Сравните правило сложения кардиналов

$$\aleph_0 + \mathbf{c} = \mathbf{c} \tag{5}$$

с правилом сложения Мундуруку:

$$\begin{gathered} \text{«много, но не очень»} + \\ + \text{«действительно много»} = \\ = \text{«действительно много»}. \end{gathered} \tag{6}$$

Это сравнение очень важно, поскольку теория множеств в наше время является фундаментом математики, а язык кардиналов есть язык теории множеств. Как это было с формулами (2)–(4), формулы (5) и (6) наглядно демонстрируют нехватку традиционных нумералов, используемых для измерения бесконечных множеств.

4. Методологические постулаты

Чтобы ввести новый математический язык и новую систему счисления, которые позволили бы нам работать с бесконечностью более простым и интуитивно понятным способом, нам нужно установить правила игры, которые будут ближе к реальной жизни по сравнению с традиционными взглядами на бесконечность. Нашей целью не будет описание продвинутых концепций теории множеств. Напротив, мы постараемся создать новые математические инструменты для решения некоторых прикладных задач. При этом мы покажем, что два способа работы с бесконечностью (традиционный и новый) не противоречат друг другу, точно так же, как результаты наблюдений в микроскоп через две линзы разной силы не приводят к противоречиям, а дополняют друг друга.

В предыдущем разделе мы показали важность систем записи чисел для выражения как конечных, так и бесконечных величин. Поскольку этот аспект мало рассматривается в традиционных теориях бесконечности, а также потому, что нас интересуют практические вычисления с бесконечностями на компьютерах, которые также не рассматриваются в классических работах, мы введем три методологических постулата, которые зафиксируют нашу философскую позицию по отношению к бесконечности (и к математике в целом).

И начнем мы со следующего откровенного признания: мы никогда не сможем дать сколь-нибудь полное описание бесконечных множеств и процессов из-за ограниченности наших возможностей. Действительно, мы живем в конечном мире и поэтому можем выполнить только конечное число любых операций. В частности, это означает, что мы можем писать только конечное число символов для выражения чисел. Итак, сформулируем первый постулат:

> ***Методологический постулат 1.*** *С одной стороны, мы признаем, что можем выполнять только конечное число операций, а с другой стороны, принимаем существование бесконечных и бесконечно малых объектов.*

Необходимо сразу заметить, что, с одной стороны, этот постулат не отражает традиционного взгляда на математический мир, потому что он подчеркивает конечность наших возможностей для выполнения любого типа операции. Традиционно же считается, что люди всегда могут выполнить бесконечное количество операций. Просто подумайте о приведенном выше примере, где построено взаимно однозначное соответствие между двумя бесконечными множествами, или вспомните множество натуральных чисел, которое неформально вводится как 1, 2, 3 и т. д. При этом негласно предполагается, что мы можем внутри этого «и т. д.» идти как угодно долго до бесконечности. С другой стороны, постулат явно не принадлежит и финитизму, математическому течению, которое отвергает существование бесконечных объектов. Постулат отражает готовность математиков изучать бесконечные объекты (которые, как мы знаем, в некоторых случаях бывают очень полезны), но напоминает нам, что для этого мы должны иметь возможность видеть результаты наших операций, т. е. мы должны закончить их так или иначе и можем выполнить эти операции только конечное число раз.

Чтобы сформулировать второй постулат, напомним, что мы хотим решать *прикладные* проблемы, связанные, следовательно, с физическим миром. Изучая его, физики используют инструменты для описания выбранного объекта исследования, и эти инструменты ограничивают их познания об объекте. Когда физик наблюдает через линзу микроскопа две черные точки, он не говорит: объект наблюдения состоит из двух черных точек. Он вынужден сказать: линза, используемая в микроскопе, позволяет мне видеть две черные точки, и я не могу больше ничего сказать о природе объекта, если не заменю инструмент — линзу или весь микроскоп — на более точный. Предположим, что после смены линзы физик видит 15 точек меньшего размера вместо первой черной точки и 23 точки вместо второй. Опять же, наш физик не скажет, что эти точки являются объектом исследования. Он опять будет говорить не об объекте, а о том, что он может наблюдать с помощью новой линзы. Физики (и информатики) прекрасно понимают, что инструмент исследования всегда ограничивает наши возможности наблюдения и изучения интересующих нас объектов.

Теперь мы можем спросить себя: какой из двух ответов — «2 точки» или «15 и 23 точки» — правильный? Ясно, что оба ответа верны, но *с разной точностью*, определяемой инструментами, используемыми для наблюдений. Мы подчеркиваем, что эти два ответа не противоречат друг другу, они оба описывают реальность (или то, что бы это ни было, что находится за нашими инструментами наблюдения) правильно с точностью инструментов, используемых для наблюдений.

Вернемся теперь к математике. Среди ее объектов исследования мы находим природные явления, числа, математические системы и объекты, созданные с помощью чисел. Среди инструментов мы выделим системы счисления (например, римскую систему, позиционную систему или систему Пираха), которые позволяют нам писать числа и выполнять с ними арифметические операции. Как и в физике, когда предлагаются новые, более точные, чем существующие, математические инструменты, они позволяют улучшить наши знания об объекте исследования, но ограничения все равно остаются: мы сможем сказать о математическом объекте только то, что нам позволит выбранный нами инструмент. Физический взгляд на математику, который подчеркивает различие между объектами исследования и инструментами, используемыми для этого исследования, описывается следующим постулатом.

> ***Методологический постулат 2.*** *Следуя естественно-научному подходу физиков, мы не станем говорить, чем* ***являются*** *математические объекты, а будем создавать инструменты (в нашем случае — новую систему счисления), которые позволят нам улучшить нашу способность наблюдать и описывать математические объекты.*

Этот постулат очень важен для нашего исследования, поскольку он вводит триаду — *исследователь, инструмент наблюдения и объект исследования* — в математику, в сильной форме подчеркивая отделение объекта от инструмента, отделение, которое физики осознали уже очень давно, в начале двадцатого века.

В частности, системы записи чисел являются инструментами, используемыми математиками для изучения математических объектов и позволяющими нам наблюдать числа, множества чисел и т. д. Поскольку новые системы записи вводятся крайне редко, в каждый конкретный исторический момент большинство людей думают, что они могут легко записать *любое* число. К сожалению (как мы уже видели выше), это не так, потому что мы можем записывать только те числа, которые можно выразить с помощью известных нам систем счисления и с помощью конечного числа символов (см. Постулат 1). Как и в физике, наши инструменты — системы записи чисел — ограничивают нас, когда мы хотим наблюдать математические объекты (числа, наборы чисел и т. д.). И как это происходит в физике, в момент выбора инструмента (системы записи) мы фиксируем точность наблюдения изучаемого математического объекта (вспомним системы записи римлян, Пираха и Мундуруку, имеющие разную точность).

Таким образом, Постулат 2 не только привлекает наше внимание к инструментам, используемым математиками, но также вводит понятие точности математических результатов в зависимости от используемых инструментов (например, систем счисления и, в более общем смысле, математических языков). Концепция точности также подчеркивает, что любой математический результат не является абсолютным, его точность ограничена выразительными возможностями языка, используемого для формулирования (записи) этого результата. Как известно, с течением времени все (важные) математические результаты постоянно переписываются, чтобы привести уровень точности этих результатов в соответствие со все время повышающимися нормами математической строгости.

Ограничения, накладываемые системами записи чисел, также играют важную роль в теоретических результатах. Этот аспект, который часто недооценивается чистыми математиками, учитывается в новой методологии, поскольку общие фразы, в которых явно не уточняется, какие системы записи чисел (и, следовательно, какие множества чисел) имеются в виду, могут привести к неоднозначному пониманию. Чтобы проиллюстрировать, как значение математического выражения меняется в зависимости от используемых систем счисления, давайте обсудим предложение: «Рассмотрим все числа $x \in [1, 2]$». Мы, люди, знакомые с позиционной системой, подразумеваем, что речь идет о вещественных числах, записанных в этой системе. Однако для Пираха и Мундуруку слова «все числа» в этой фразе означают только 1 и 2. Для людей, которые не знакомы с иррациональными числами (или не принимают их существование), но знают дроби (как, например, Пифагор, который, если верить некоторым источникам, отвергал результаты Гиппаса из Метапонта о существовании иррациональных чисел), «все числа» — это числа, которые можно записать в форме $\frac{p}{q}$, где, в свою очередь, p и q выражаются нумералами некоторой фиксированной системы записи. Например, система счисления Пираха, обогащенная возможностью записи чисел в виде $j+\frac{p}{q}$, $j, p, q \in \{1,2\}$, позволяет нам ответить, что «все числа» в интервале [1, 2] — это числа 1, $1+\frac{1}{2}$ и 2. Наконец, отметим, что система кардиналов Кантора не различает количества чисел, записанных в двоичной или десятичной системе в интервале [1, 2], давая в обоих случаях один и тот же ответ — оба множества имеют континуальную мощность (мы вернемся к этому вопросу позже и покажем, что эти два множества имеют разное количество элементов).

Итак, как мы показали на этом простом примере, если не уточнять, какие системы записи чисел используются (т. е. не говорится явно о применяемом в исследовании инструменте), значение общих фраз может привести к неоднозначности в определении объекта исследования и, следовательно, точность получаемых результатов будет ниже.

Другое важное следствие Постулата 2 состоит в том, что он меняет наш взгляд на аксиоматические системы. Постулат говорит об инструментах и о том факте, что они ограничивают нашу способность описывать математические объекты. В отношении аксиоматических систем это означает, что они *не определяют* объекты, а *описывают* их с точностью используемого математического языка. Постулат подчеркивает, что невозможно построить какую-либо абсолютную, окончательную аксиоматическую систему. Всегда существует зависимость от инструмента, т. е. от используемого языка (включая выбранную систему записи чисел, являющуюся частью языка), который ограничивает наши выразительные возможности (вспомним Тютчева: «Мысль изреченная есть ложь»). Постулат, в определенном смысле, привносит в математику методологию, которую физики внедрили в свою науку еще в первой половине двадцатого века в связи с развитием теории относительности, квантовой механики и дискуссией о сложном взаимодействии между объектами исследования и инструментами, используемыми для изучения этих объектов.

Вернемся теперь к нашим методологическим постулатам. Следующий и последний постулат происходит, как мы уже говорили, из Древней Греции, где был сформулирован принцип «часть меньше целого», который описывает фундаментальное свойство окружающего нас мира. Это свойство отсутствует во многих традиционных системах записи чисел, когда они используются для работы с бесконечными множествами. Поскольку мы уже видели, что результаты типа $\infty - 1 = \infty$ не отражают природу бесконечности, а являются просто следствием бедности традиционных систем записи чисел, наша позиция в отношении этого принципа более последовательна и выражается нижеследующим постулатом:

> ***Методологический постулат 3.*** *Следуя мыслителям Древней Греции, принцип «часть меньше целого» применяется к любой величине (конечной, бесконечной или бесконечно малой) и к любому множеству или процессу (конечному или бесконечному).*

Постулат, следовательно, не согласуется со взглядом Кантора на бесконечность, утверждающим, что часть бесконечного объекта может быть такой же большой, как и весь объект. На первый взгляд кажется, что это должно привести нас к конфликту с теорией Кантора. Как мы увидим ниже, постулат не противоречит теории Кантора, потому что (и здесь мы подчеркнем важность Постулата 2) оба подхода наблюдают одни и те же математические объекты, однако они используют разные инструменты и имеют разную точность. Аналогично, уже упоминавшиеся две разные линзы, когда они используются для наблюдения за одним и тем же объектом, дают разные результаты, оба правильные, но имеющие различную точность.

5. Аксиома бесконечной единицы и измерение бесконечных множеств

Сформулировав три методологических принципа, которыми мы будем руководствоваться в нашей работе, мы можем приступить к обсуждению нового способа выражения бесконечных и бесконечно малых величин и вычислений с ними. Чтобы облегчить эту задачу, будет полезно рассмотреть следующий пример, который показывает, что с давних пор существуют способы счета при помощи больших величин, которые вводятся более сложным способом, чем просто прибавление единицы (как это делается, например, в аксиомах Пеано).

Представьте себе большое зернохранилище с огромным количеством зерен пшеницы (предположим, что все они одинакового размера), которые невозможно сосчитать, перебирая их по одному, потому что их слишком много. Несмотря на это, мы хотим знать, сколько зерен в хранилище. Очевидно, что можно ответить на этот вопрос так: «много» или «очень много». Эти ответы правильные, но точность их невысока. Для того чтобы ответить на вопрос с большей точностью, возьмем мешки и опять предположим, что все они одинакового размера и каждый из них может вместить одно и то же, неизвестное нам, количество зерен (мешки такие большие, что мы не в состоянии за разумное время сосчитать, сколько зерен они могут вместить). Мы будем просто полностью заполнять мешки и считать их. Тогда мы сможем выразить количество зерен в хранилище, используя уже две единицы измерения: мешки и зерна. Если амбар большой, то мы можем продолжать вводить новые единицы измерения: грузовики и железнодорожные вагоны. Снова предположим, что все грузовики могут вмещать одинаковое, неизвестное нам, количество мешков, а все вагоны поезда — одинаковое, опять-таки неизвестное нам, количество грузовиков. В итоге мы получим ответ в следующей форме: в нашем хранилище 35 вагонов, 18 грузовиков, 14 мешков и 57 зерен пшеницы.

Можно немедленно заметить, что, например, убирая четыре вагона и добавляя два мешка и одно зерно или убирая три грузовика и добавляя один мешок, мы можем зафиксировать, что в первом случае у нас будет 31 вагон, 18 грузовиков, 16 мешков и 58 зерен, а во втором — 35 вагонов, 15 грузовиков, 15 мешков и 57 зерен. То есть мы не только в состоянии записать, что зерна становится больше или меньше, но и *насколько* больше или меньше. Интересно, что мы можем дать точные ответы о количестве пшеницы, даже если мы не знаем, сколько зерен в мешке, сколько мешков в грузовике и сколько грузовиков в вагоне поезда. Итак, работая с этими новыми единицами измерения — мешками, грузовиками и вагонами, — мы можем выразить *точное количество* зерна в амбаре, которое было невыразимым, если бы использовалась только простейшая единица измерения — зерно.

Теперь становится ясно, как действовать для создания нового инструмента для работы с бесконечностью: мы должны распространить идею введения новых единиц измерения с больших, но конечных чисел и множеств, на бесконечные числа и множества. Мы можем сделать это, экстраполируя от конечного к бесконечному тот факт, что n — это количество элементов в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n\}$. Поэтому мы введем новую бесконечную единицу измерения — количество элементов в множестве натуральных чисел $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, где под натуральными числами мы понимаем числа, используемые для счета предметов*. Для обозначения этого числа мы будем использовать символ ①, который мы будем называть по-английски *grossone*, т. е. большая единица (по-русски читается «гроссуан») или гросс-единица. Введение этого числа позволит нам записать множество натуральных чисел в виде:

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots, ①-3, ①-2, ①-1, ①\}.$$

По аналогии с пшеницей мы можем интерпретировать множество $\mathcal{N}$ как мешок, а ① — как количество зерен в мешке.

Гроссуан вводится через его свойства (аналогично в прошлом для того, чтобы перейти от натуральных чисел к целым $\mathcal{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, было введено новое число — ноль, для которого был выбран новый нумерал «0», и это новое число было описано через его свойства (т. е.: для любого числа a следует, что $a + 0 = 0 + a = a$, и т. д.), и эта аксиома добавлялась к уже известным аксиомам натуральных чисел. В свою очередь, Аксиома Бесконечной Единицы измерения, которую мы сейчас введем, добавляется к аксиомам действительных чисел (аксиомы интерпретируются в смысле *описания* объекта, который мы обсуждали выше). Как следствие, мы предполагаем, что для ① выполняются обычные свойства действительных чисел (ассоциативность, дистрибутивность и т. д.). Аксиома Бесконечной Единицы** состоит из трех частей и описывает следующие свойства ①:

* Некоторые авторы определяют натуральные числа как *конечные* числа, используемые для счета предметов. Очевидно, что такое определение является как минимум неточным, если принять, что множество $\mathcal{N}$ бесконечно. Действительно, если его элементы строятся, начиная с 1, по правилу: после числа n следует число $n+1$, то каждое следующее число будет конечным и, следовательно, все натуральные числа будут конечными и, по построению, любое множество $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ будет содержать конечное число элементов. Получаем противоречие с предположением, что $\mathcal{N}$ является бесконечным множеством.

** В Аксиоме бесконечные множества будут описаны в традиционной форме, т. е. без указания последнего элемента. Например, множество натуральных чисел будет записано в виде $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ вместо $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots, ①-3, ①-2,$

Аксиома Бесконечной Единицы.

- Гроссуан больше любого конечного натурального числа, т. е. ① > n, где $n \in \mathcal{N}$ есть конечное число.
- Гроссуан — это число и, следовательно, он ведет себя с числами 0 и 1, как и все другие числа:

$$0 \cdot ① = 0,\ ① \cdot 0 = 0,\ ① - ① = 0,\ ① : ① = 1,$$
$$①^0 = 1,\ 0^① = 0,\ 1^① = 1.$$

- Множество натуральных чисел $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ можно разделить на n равных частей $\mathcal{N}_{k,n}$, где $n \in \mathcal{N}$ есть конечное число,

  $\mathcal{N}_{k,n} = \{k, k+n, k+2n, k+3n, \ldots\}$, $1 \le k \le n$,

  и каждое множество $\mathcal{N}_{k,n}$ состоит из ①/n элементов. Например, при $n = 2$ получаем два множества (нечетные числа O и четные числа $\mathcal{E}$ соответственно):

  $O = \mathcal{N}_{1,2} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$,

  $\mathcal{E} = \mathcal{N}_{2,2} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$,

  каждое из которых состоит из ①/2 элементов. Если мы возьмем $n = 3$, то получим три множества

  $\mathcal{N}_{1,3} = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$,

  $\mathcal{N}_{2,3} = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$,

  $\mathcal{N}_{3,3} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$,

  каждое из которых состоит из ①/3 элементов.

В этой Аксиоме, применяя Постулат 3, мы определяем и измеряем части множества $\mathcal{N}$ с помощью долей ①. Например, в множестве $\mathcal{E}$ четных чисел — ①/2 элементов. Отметим, что мы не перечисляем его элементы один за другим — мы не можем этого сделать, потому что множество $\mathcal{E}$ бесконечно, тогда как мы приняли Постулат 1 и можем выполнить только конечное число операций. Мы применяем здесь Постулат 3 и, зная, что множество натуральных чисел имеет ① элементов, заключаем, что его половина имеет ровно в два раза меньше элементов, чем $\mathcal{N}$, т. е. ①/2. Возвращаясь к примеру с зернохранилищем, мы можем дать следующую интерпретацию: мы не знаем, сколько зерен в мешке, и не знаем, сколько зерен в половине мешка, но мы знаем, что половина мешка содержит в два раза меньше зерен, чем весь мешок. Из третьей части Аксиомы немедленно следует, что числа ①/n являются целыми (т. е. ① делится на любое конечное целое число n, разделяя это свойство с нулем), поскольку ①/n есть число элементов множества $\mathcal{N}_{k,n}$, $1 \le k \le n$.

Отметим, что введение ① позволяет нам наблюдать не только начальные, но и конечные элементы некоторых бесконечных множеств, что гораздо удобнее при работе с ними. Например, мы можем записать множества $\mathcal{N}$, O, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Z}$ в следующем виде:

$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, ①-4, ①-3, ①-2, ①-1, ①\}$;

$O = \mathcal{N}_{1,2} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, ①-5, ①-3, ①-1\}$;

$\mathcal{E} = \mathcal{N}_{2,2} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, ①-4, ①-2, ①\}$;

$\mathcal{Z} = \{-①, -①+1, -①+2, -①+3, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, ①-3, ①-2, ①-1, ①\}$.

Подчеркнем еще раз, что традиционные системы записи, используемые для выражения конечных чисел, не позволяли нам видеть бесконечные натуральные числа ①, ①–1, ①–2, …, так же как примитивная система Пираха не позволяет нам видеть числа 3, 4, 5 и т. д. Благодаря системе записи с ①, мы можем наблюдать большое количество других бесконечных целых чисел, например,

… ①/3–3, ①/3–2, ①/3–1, ①/3, ①/3+1, ①/3+2 ①/3+3, …

… ①/2–3, ①/2–2, ①/2–1, ①/2, ①/2+1, ①/2+2, ①/2+3, …

Новая система записи помогает также выразить бесконечные целые числа, бóльшие, чем гроссуан, такие как, например, $①^2$, $53.7①^{3.1}$, $①^①$ и т. д., принадлежащие множеству $\check{\mathcal{N}}$ *расширенных натуральных чисел*:

$\check{\mathcal{N}} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, ①-4, ①-3, ①-2, ①-1, ①, ①+1, ①+2, \ldots, 2①-1, 2①, 2①+1, \ldots, ①^2-1, ①^2, ①^2+1, \ldots, 53.7①^{3.1}-1, 53.7①^{3.1}, 53.7①^{3.1}+1, \ldots, ①^①-1, ①^①, ①^①+1, \ldots, 4①^{5①}-1, 4①^{5①}, 4①^{5①}+1, \ldots\}$.

Следует отметить, что новая система записи, хотя и является более мощной по сравнению с традиционными, так же как они, имеет свои ограничения. Как и все другие системы записи, она не может ответить на *все* вопросы о бесконечных множествах и выразить *все* числа. Например, эта система слишком слаба, чтобы ответить на вопрос: «Сколько элементов содержится в множестве расширенных натуральных чисел $\check{\mathcal{N}}$?» Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо ввести более мощную систему счисления, например, определив некоторым разумным образом символ ② > ①.

Напомним также, что количество чисел, которые мы можем наблюдать в каждом конкретном множестве (конечном или бесконечном), зависит от силы системы записи, используемой для наблюдения. Так, например, Пираха во всем множестве $\mathcal{N}$ (и, как следствие, в $\check{\mathcal{N}}$) могут видеть только числа 1 и 2. Если мы добавим к их системе гроссуан и исключим «много» (поскольку мы знаем, что использование нумерала «много» ведет к парадоксальной ситуации «много» + 1 = «много»), то мы сможем наблюдать в $\mathcal{N}$ только следующие числа: 1, 2, ①–2, ①–1, ①. Каков

①–1, ①}. Подчеркнем, что в обоих случаях мы имеем дело с одним и тем же объектом — множеством натуральных чисел, которое, однако, наблюдается при помощи двух разных инструментов: первый — это традиционная система записи, которая не позволяет выражать бесконечные натуральные числа, а второй — это новая система записи, которая предоставляет такую возможность. Далее будет более подробно рассмотрено, как благодаря нумералам, включающим в себя ①, становится возможным вычислять число элементов определенных бесконечных множеств.

будет результат выполнения операции 2 + 2 в этой системе записи? Так как мы разделили объект исследования (множество $\mathcal{N}$) и инструмент исследования (систему записи чисел), то мы сможем избежать парадоксов и ответить следующим образом: «Система записи, имеющая только нумералы 1, 2, ①–2, ①–1, ①, слишком слаба, чтобы ответить на этот вопрос. Необходимо взять более мощную систему, позволяющую выразить число 4». Из вышесказанного видно, что отделение объекта от инструмента позволяет значительно упростить работу с бесконечными числами и множествами и вместо заявлений о парадоксальной *природе объектов*, участвующих в операциях «много» + 1 = «много» и $\infty + 1 = \infty$, перенести центр вопроса на слабость и силу используемого инструмента и возможность его улучшения или замены в целях увеличения точности наблюдения объектов исследования.

Следует подчеркнуть, что система записи, использующая гроссуан, позволяет легко измерять многие бесконечные множества, если удается описать их структуру (формулами, из комбинаторных соображений или каким-то другим способом), а также используя теоретико-множественные операции. Рассмотрим несколько примеров и начнем с подсчета числа элементов следующего множества:

$$B = (\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}\ \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}) \setminus \{3, 9, 15\},$$

где множества в скобках являются подмножествами $\mathcal{N}$. Первое из них есть множество нечетных чисел $O = \mathcal{N}_{1,2}$, и, согласно Аксиоме, оно содержит ①/2 элементов. Второе множество в скобках есть не что иное, как $\mathcal{N}_{3,3}$, и, следовательно, оно имеет ①/3 элементов. Легко показать, что пересечение этих двух множеств есть $\{3, 9, 15, 21, \ldots\} \subset \mathcal{N}$, т. е. множество $\mathcal{N}_{3,6}$, которое, согласно Аксиоме, имеет ①/6 элементов. Удалив из этого множества числа 3, 9 и 15, мы получим окончательный результат: множество B имеет ①/6 – 3 элементов (в интерпретации зернохранилища: шестая часть мешка минус три зерна).

Теперь давайте подсчитаем количество элементов в множестве C, состоящем из пар натуральных чисел:

$$C = \{(a, b) : a \in \mathcal{N}, b \in \mathcal{N}\}.$$

Из комбинаторики известно, что при наличии двух позиций, каждая из которых может быть заполнена k символами, количество возможных пар равно k^2. В нашем случае, поскольку $\mathcal{N}$ имеет гроссуан элементов, k = ①. Следовательно, множество C имеет ①^2 элементов. Из аналогичных соображений можно заключить, что множество нумералов

$$F = \{\frac{p}{q} : p \in \mathcal{N}, q \in \mathcal{N}\}$$

также имеет ①^2 элементов. Обратите внимание, что F не является множеством положительных рациональных чисел. В этом упражнении мы посчитали количество *различных нумералов*, которые могут выражать одно и то же число. Например, число 1/2 может быть выражено ①/2 разными нумералами:

$$1/2,\ 2/4,\ 3/6,\ \ldots,$$
$$(0.5\text{①}-2)/(\text{①}-4),\ (0.5\text{①}-1)/(\text{①}-2),\ (0.5\text{①})/\text{①},$$

каждый из которых был учтен при подсчете. Следовательно, полученное количество элементов множества F, ①^2, является верхней оценкой числа положительных рациональных чисел. Мы заключим эту серию примеров рассмотрением множества D, содержащего натуральные числа вида n^2, $n \in \mathcal{N}$, т. е.:

$$D = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\},$$

и ответом на вопрос: «Сколько чисел этого типа присутствует в множестве натуральных чисел $\mathcal{N}$?» Поскольку множество натуральных чисел содержит ① элементов, а ① — последнее натуральное число, чтобы ответить на вопрос, мы должны найти наибольшее натуральное число n такое, что $n^2 \le$ ①. Решив это простое неравенство, мы можем заключить, что множество D имеет k элементов, где k — целая часть квадратного корня гроссуана, т. е. $k = [\text{①}^{1/2}]$, где $[u]$ есть целая часть u. Таким образом, мы ответили на вопрос, интересовавший Галилео Галилея, о котором мы упоминали в разделе 3.

Все множества, рассмотренные выше, в традиционной терминологии являются счетными. Другими словами, система кардиналов Кантора не позволяет увидеть, что они имеют разное число элементов. Аналогично, среди множеств континуальной мощности при помощи новой системы записи можно выделить множества, имеющие разное число элементов. Например, множество вещественных чисел $x \in [0,1)$, записанных в двоичной системе, имеет $2^{\text{①}}$ элементов, а множество вещественных чисел $x \in [0,1)$, записанных в десятичной системе, имеет $10^{\text{①}}$ элементов. Если мы добавим к этому множеству число 1, то в результате получим множество с $10^{\text{①}} + 1$ элементом. Множество вещественных чисел $x \in [0,2)$, записанных в десятичной системе, имеет $2 \cdot 10^{\text{①}}$ элементов, а число подмножеств множества $\mathcal{N}$ легко вычисляется как $2^{\text{①}}$ (более подробная дискуссия на эту тему содержится в [18]).

Мы закончим этот раздел сопоставлением биекции Кантора и новых инструментов, для того чтобы показать, что эти два инструмента не противоречат друг другу, а просто являются двумя «линзами», имеющими разную точность. Традиционное заключение, которое делается из рассмотренной выше биекции (1), таково: оба множества являются счетными, несмотря на тот факт, что одно есть часть другого. Однако отделение объекта исследования (бесконечные множества O и $\mathcal{N}$) от инструмента (биекция) позволяет сделать другой вывод: точность инструмента недостаточна для того, чтобы увидеть, что эти множества имеют разное число элементов. Действительно, традиционные способы записи позволяют нам увидеть только начальные части сопоставления чисел в формуле (1), создавая *иллюзию*, что нечетных чисел столько же, сколько и натуральных. Введение гроссуана и других нумералов, позволяющих с его помощью выразить большое количество разных бесконечных чисел, позволяет нам увидеть завершающую часть формулы (1), а именно:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11, & \dots & ①-5, & ①-3, & ①-1 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots & ①/2-2, & ①/2-1, & ①/2 \end{array}$$

Таким образом, новый инструмент позволяет нам увидеть, что парадоксальной ситуации нет и половина множества имеет ровно в два раза меньше элементов, чем целое.

Рассмотрим теперь задачу, которая в некотором смысле является обратной к предыдущей. Требуется умножить на 2 натуральные числа и записать несколько начальных и конечных элементов полученного множества, которое мы назовем $\mathcal{E}^2$.

Как уже было сказано несколько раз выше, введение гроссуана позволяет нам записать множество натуральных чисел в виде:

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots ①/2-1, ①/2, ①/2+1, \dots ①-2, ①-1, ① \}.$$

Мы знаем, что это множество содержит ① элементов. Поэтому, умножив каждый из них на два, мы получим множество $\mathcal{E}^2$, которое также будет иметь ① элементов (число элементов множества чисел не меняется, если умножить каждый его элемент на одну и ту же константу, отличную от 0). Умножение конечных натуральных чисел на 2 дает нам конечные четные натуральные числа. Рассмотрим теперь число ①/2. Умноженное на 2, оно дает нам последнее четное натуральное число ①, а ①/2+1, умноженное на 2, дает нам ①+2, которое является четным, но уже не натуральным; это расширенное натуральное число. Наконец, умножение ① на 2 дает нам 2①, и поэтому мы получаем множество:

$$\mathcal{E}^2 = \{ 2, 4, 6, \dots, ①-2, ①, ①+2, \dots, 2①-4, 2①-2, 2①\},$$

которое состоит из ①/2 четных натуральных чисел (от 2 до ①) и ①/2 четных расширенных натуральных чисел (от ①+2 до 2①).

6. Решение вычислительных задач

Теперь обратим наше внимание на расходящиеся ряды. Хорошо известно, что в традиционной математике существуют трудности при работе с расходящимися рядами. Например, в отношении рядов $S_1 = 4 + 4 + 4 + \dots$ и $S_2 = 5 + 5 + 5 + \dots$ нам просто говорят, что оба они расходятся, а операции $S_1 - S_2$ и S_1 / S_2 приводят к неопределенным формам, т. е. мы не можем сказать, каков их результат. Используя новую методологию и помня, что ∞ ведет себя как «много», запись $S_1 = 4 + 4 + 4 + \dots$ становится своего рода «вычислением суммы, где много слагаемых, равных 4». Напротив, бесконечные числа, которые мы можем выражать благодаря введению ①, позволяют нам вычислять суммы с бесконечным числом слагаемых как простые выражения. Для этого, как и в случае с суммами с конечным числом слагаемых, необходимо указать количество слагаемых в сумме. Если первая сумма S_1 имеет k слагаемых, а вторая сумма S_2 имеет n слагаемых, то

$$S_1(k) = \underbrace{4 + 4 + 4 + \dots + 4}_{k \text{ слагаемых}} = 4k,$$

$$S_2(n) = \underbrace{5 + 5 + 5 + \dots + 5}_{n \text{ слагаемых}} = 5n,$$

независимо от того, являются ли n и k конечными или бесконечными. Если, например, оба числа бесконечны и равны 3①, т. е. $k = n = 3①$, то мы получаем $S_1(3①) = 12①$, $S_2(3①) = 15①$, и с полученными числами мы можем легко выполнить операции вычитания и деления:

$$S_2(3①) - S_1(3①) = 15① - 12① = 3①;$$

$$S_2(3①) \;/\; S_1(3①) = 15① \;/\; 12① = 1{,}25.$$

Конечно, точно так же как это происходит в суммах с конечнвм числом слагаемых, изменяя значения n и k, мы получим результаты, которые будут зависеть от этих новых значений n и k. Например, для $k = ①/2$ и $n = ① - 2$ мы получаем $S_1(①/2) = 2①$, $S_2(① - 2) = 5① - 10$, а разность и частное этих значений равны:

$$S_2(① - 2) - S_1(①/2) = (5① - 10) - 2① = 3① - 10;$$

$$S_2(① - 2) \;/\; S_1(①/2) = 2{,}5 - 5①^{-1}.$$

Для того чтобы проиллюстрировать, как новая методология работает со знакопеременными рядами, мы рассмотрим знаменитый ряд Гранди:

$$S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1\dots$$

Имея в распоряжении бесконечные числа, выражаемые при помощи ①, для того чтобы произвести вычисления, достаточно указать, сколько в этой сумме будет слагаемых. Мы будем рассматривать $S_3(n)$ совершенно одинаково как в случае, когда число слагаемых n конечно, так и когда n бесконечно. Итак, если n четно, т. е. $n = 2k$, тогда $S_3(2k) = 0$, если же n нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то $S_3(2k + 1) = 1$. Например, $S_3(①) = 0$ и $S_3(2① + 1) = 1$.

Обратимся теперь к вопросу о перестановке слагаемых в знакопеременных рядах. Известная теорема Римана—Дини об условно сходящихся рядах гласит, что для произвольного числа x можно так поменять порядок суммирования элементов ряда, что сумма этого ряда станет равна x. Этот факт противоречит нашему опыту с суммами, число слагаемых в которых конечно, где, как мы знаем, от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Покажем, что традиционный результат Римана—Дини может быть интерпретирован аналогично уже рассмотренной ситуации с биекцией, т. е. он показывает не свойство расходящихся рядов, а слабость систем записи чисел, традиционно используемых при работе с такими рядами. Сделаем это на примере ряда S_3, который не является даже условно сходящимся (но его сумма по Чезаро равна $^1/_2$), и соответствующих сумм $S_3(n)$, где число слагаемых n бесконечно.

Глядя на традиционные переупорядочения слагаемых в ряде S_3, возникает иллюзия, что они дают разные результаты:

$$S_3 = (1+1-1)+(1+1-1)+(1+1-1)+(1+1-1)+\ldots,$$
$$S_3 = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots,$$
$$S_3 = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$$

Это происходит потому, что традиционные системы записи чисел не позволяют явно указать бесконечное число слагаемых. Рассмотрим теперь ситуацию с новой точки зрения и зафиксируем число слагаемых в $S_3(n)$, взяв, например, $n = 2①$. Поскольку $2①$ есть четное число, получаем следующий результат:

$$S_3(2①) = \underbrace{1-1+1-1+\ldots+1-1+1-1}_{2①\text{ слагаемых}} = 0.$$

Теперь, зная точное число слагаемых в сумме $S_3(2①)$, мы можем любым способом изменить порядок слагаемых, не изменяя результат, как это происходит для любого конечного числа слагаемых. Заметим, что в нашей сумме ① положительных и ① отрицательных слагаемых. Рассмотрим в качестве примера первый из приведенных выше способов перестановки слагаемых (два других случая решаются аналогично). Выполняя переупорядочение, мы заметим, что после добавления $①/2$ выделенных скобками сумм $1 + 1 - 1$ у нас заканчиваются положительные единицы и остается только $①/2$ отрицательных единиц, которые нам нужно добавить, чтобы использовать все имеющиеся слагаемые, то есть:

$$S_3(2①) = \underbrace{(1+1-1)+\ldots+(1+1-1)}_{3/2①\text{ слагаемых}} + \underbrace{(-1-1\ldots-1-1)}_{1/2①\text{ слагаемых}} =$$
$$= ①/2\cdot(1+1-1)+①/2\cdot(-1)=0.$$

Отрицательные единицы не были видны в традиционных системах записи и, таким образом, *казалось*, что перестановки слагаемых приводят к изменению результата. Более подробное обсуждение этого и других рядов можно найти в работах [18, 43], где подробно обсуждаются различные результаты, полученные как традиционным, так и новым подходом (в частности, поклонники дзета-функции Римана найдут в этих работах несколько страниц, посвященных этой теме).

Для того чтобы улучшить понимание нового способа счета, вычислим теперь сумму $S_4(①)$, которая имеет ① слагаемых вида $(-1)^{i+1}\cdot 2i$, $1 \le i \le ①$ и строится следующим образом:

$$S_4(①) = 2-4+6-8+\ldots+$$
$$+(2①-6)-(2①-4)+(2①-2)-2①.$$

В этой сумме мы имеем $①/2$ положительных слагаемых и $①/2$ отрицательных слагаемых, которые можем сгруппировать следующим образом

$$S_4(①) = (2+6+\ldots+(2①-6)+(2①-2))-$$
$$-(4+8+\ldots+(2①-4)+2①).$$

Теперь у нас есть две арифметические прогрессии, каждая из которых содержит $①/2$ слагаемых и которые мы можем легко вычислить:

$$S_4(①) = (2+(2①-2))\,①/4-(4+2①)①/4=$$
$$= ①^2/2 - ① - ①^2/2 = -①.$$

Этот пример показывает также, что становится очень легко вычислить сумму всех натуральных чисел:

$$1+2+3+4+\ldots+(①-2)+(①-1)+①=$$
$$=(1+①)\cdot①/2=0.5(①^2+①).$$

Каждая хорошая теория нуждается в собственном рабочем инструменте, чтобы стать практической наукой. Представленная здесь методология была использована автором в качестве отправной точки для разработки суперкомпьютера нового типа — Компьютера Бесконечности, на который было получено несколько международных патентов [12]. Это изобретение позволяет преобразовать область знаний, которая всегда считалась теоретической, в практическую науку с собственным вычислительным инструментом. Если раньше в вычислениях на компьютере (и не только) мы останавливались перед бесконечно малыми, бесконечными или неопределенными величинами (такими, как, например, $\infty - \infty$), то теперь, благодаря новой методологии, можно не только продолжать вычисления, но и выполнять их автоматически на Компьютере Бесконечности. Наличие такого мощного вычислительного инструмента открывает обширные горизонты для построения новых математических моделей и численных методов (см. список литературы, где упомянуты различные приложения).

Опишем кратко, с какими числами работает Компьютер Бесконечности и каким образом он выполняет арифметические операции с ними.

Компьютер Бесконечности работает с числами, представленными в позиционной системе с основанием ①. Каждое число может содержать несколько частей вида $a①^b$, где $a \neq 0$ есть конечное число, называемое *гроссцифра* потому, что, в отличие от цифр, которые используются в позиционных системах с конечным основанием и записываются одним символом, здесь нам нужно больше символов, чтобы выразить, какое количество каждой степени ① присутствует в нашем числе. Отметим, что гроссцифры могут быть положительными или отрицательными, а также целыми или дробными. В данной статье мы рассматриваем только конечные степени b, которые могут быть целыми или дробными и называются *гроссстепени*. В бесконечных частях $a①^b$ гросс-степени $b > 0$, а в бесконечно малых частях $b < 0$. Число также может иметь (или не иметь) конечную часть $a①^0$. Напомним, что $①^0 = 1$, поэтому любое конечное число a можно записать как $a = a①^0$. Если в числе есть хотя бы одна бесконечная часть, то оно бесконечное, а если есть только бесконечно малые части, то оно бесконечно малое ($①^{-1}$ есть самое простое бесконечно малое число). В качестве первого примера рассмотрим число

$$18.1①^{62.5}-34.2①^0 72.9①^{-8.7} 36①^{-83.42}=$$
$$=18.1①^{62.5}-34.2①^0+72.9①^{-8.7}+36①^{-83.42},$$

которое представляет собой бесконечно большое число, состоящее из одной бесконечной части, равной

$18.1\text{①}^{62.5}$, конечной части, равной $-34.2\text{①}^{0} = -34.2$, и двух бесконечно малых частей — $72.9\text{①}^{-8.7}$ и $36\text{①}^{-83.42}$. Теперь рассмотрим числа:

$$-34.2\text{①}^{0}72.9\text{①}^{-8.7}36\text{①}^{-83.42} = \\ = -34.2\text{①}^{0} + 72.9\text{①}^{-8.7} + 36\text{①}^{-83.42},$$

$$72.9\text{①}^{-8.7}36\text{①}^{-83.42} = 72.9\text{①}^{-8.7} + 36\text{①}^{-83.42}.$$

Первое из них — конечное (т. е. конечные числа могут содержать и бесконечно малые части), а второе — бесконечно малое.

Способы выполнения арифметических операций с данными числами подробно описаны в работе [18], доступной на сайте [12]. Приведем здесь только несколько примеров, из которых, однако, будет видно, что операции с данными числами очень просты для выполнения. Рассмотрим следующие числа:

$$A = 12.3\text{①}^{24.5}6.7\text{①}^{0} - 8.9\text{①}^{-15.3},$$

$$B = 6.8\text{①}^{-12.3}5.7\text{①}^{-23.6},$$

$$C = 12.3\text{①}^{24.5}6.7\text{①}^{0}6.8\text{①}^{-12.3} - 8.9\text{①}^{-15.3}5.7\text{①}^{-23.6},$$

$$D = 12.3\text{①}^{24.5}6.7\text{①}^{0}-6.8\text{①}^{-12.3} - 8.9\text{①}^{-15.3} - 5.7\text{①}^{-23.6},$$

$$E = 83.64\text{①}^{12.2}70.11\text{①}^{0.9}45.56\text{①}^{-12.3}38.19\text{①}^{-23.6} - \\ - 60.52\text{①}^{-27.6} - 50.73\text{①}^{-38.9}.$$

Можно легко увидеть, что

$$A + B = C,\ A - B = D,\ A \cdot B = E,\ E / B = A.$$

Проиллюстрируем теперь на двух примерах некоторые из преимуществ, которые можно получить, используя Компьютер Бесконечности для решения вычислительных задач на практике.

Первый пример касается численного вычисления производных. Известно, что во многих практических задачах необходимо вычислять функции и их производные с использованием очень сложных компьютерных программ, неизвестных пользователю (например, расчетный код может быть покрыт коммерческой тайной). В таких приложениях пользователь предоставляет программе значение x в качестве входных данных, и она возвращает соответствующее значение функции $f(x)$ и производной $f'(x)$, не объясняя, как эти значения были вычислены. Более того, очень часто пользователь имеет в своем распоряжении только код для вычисления $f(x)$ и вынужден использовать численные методы для аппроксимации производной $f'(x)$ на компьютере. Самый простой способ получить некое приближенное значение производной — это выбрать небольшое число h и использовать одну из следующих хорошо известных формул:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

При этом очевидно, что при больших значениях h возникают большие ошибки приближения. С теоретической точки зрения при $h \to 0$ все три формулы дают результаты, которые стремятся к производной $f'(x)$ в точке x. Однако на практике это не так. Поскольку числа в компьютере представлены конечным числом цифр, невозможно уменьшить h ниже определенного порогового значения. Более того, очень часто (по той же причине, связанной с представлением чисел) для малых значений h мы получаем, что величины $x - h$, x и $x + h$ становятся слишком близкими, и компьютер не может вычислить значения функций $f(x - h)$, $f(x)$ и $f(x+h)$ с достаточной точностью, возвращая во всех трех случаях одно и то же приблизительное значение и, следовательно, делая невозможным использование вышеупомянутых формул аппроксимации, поскольку мы получили бы:

$$f(x+h) - f(x) = 0,\ f(x) - f(x-h) = 0,\ f(x+h) - f(x-h) = 0.$$

Таким образом, на всех традиционных компьютерах существует критическое значение приближения производной $f'(x)$, лучше которого получить аппроксимацию на данном конкретном компьютере невозможно.

Теперь предположим, что программа, которая вычисляет $f(x)$, есть на Компьютере Бесконечности. Как в этом случае оценить производную $f'(x)$? Ответ на этот вопрос был дан в работе [44], доступной на сайте [12], и мы его здесь проиллюстрируем следующим примером.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, реализованную на КБ, и предположим, что ее аналитический вид неизвестен пользователю, который хочет вычислить в заданной точке $x = 5$ значение функции $f(5)$ и три производные $f'(5)$, $f''(5)$, $f^{(3)}(5)$, имея в своем распоряжении только эту программу, вычисляющую $f(x)$.

Вместо того чтобы использовать вышеупомянутые формулы численной аппроксимации, предлагается просто вычислить на КБ значение $f(5+\text{①}^{-1})$, который возвращает нам следующее число:

$$f(5 + \text{①}^{-1}) = 1.5\text{①}^{0} - 0.125\text{①}^{-1} + 0.03125\text{①}^{-2} - \\ - 0.0078125\text{①}^{-3} + \ldots,$$

которое состоит из конечной части, равной 1.5, и некоторого конечного числа бесконечно малых частей, из которых мы будем использовать первые три: -0.125①^{-1}, 0.03125①^{-2}, и 0.0078125①^{-3}. В работе [44] было доказано, что гроссцифры, входящие в состав $f(5+\text{①}^{-1})$, позволяют нам получить *точные* значения функции $f(5)$ и всех ее производных (где слово *точное* означает: с точностью до реализации кода $f(x)$). Действительно, легко увидеть, что гроссцифра конечной части, 1.5, есть точное значение $f(5)$. Гроссцифра -0.125 первой бесконечно малой части дает нам точную первую производную $f'(5)$. Гроссцифра 0.03125 второй бесконечно малой части позволяет вычислить точную вторую производную $f'(5)$. Наконец, гроссцифра -0.0078125 третьей бесконечно малой части позволяет вычислить третью производную $f^{(3)}(5)$, которая также является точной:

$$f(5) = 1.5,$$
$$f'(5) = -0.125;$$
$$f''(5) = 2! \cdot 0.03125 = 0.0625;$$
$$f^{(3)}(5) = 3! \cdot (-0.0078125) = -0{,}046875.$$

Компьютер Бесконечности позволяет отказаться от использования приближений и вычислять точные производные, имея только код функции $f(x)$. Это происходит благодаря тому, что КБ во время вычислений сортирует части $a①^b$ гроссчисел в порядке убывания гросс-степеней b. Таким образом, КБ, вычисляющий $f(5+①^{-1})$, численно восстанавливает коэффициенты в разложении ряда Тейлора для функции $f(x)$ в точке $x = 5$ и при $h = ①^{-1}$, хотя и не знает этого разложения. Более сложные примеры и более подробное описание заинтересованный читатель найдет в работе [44].

Заключительный численный пример рассматривает следующую задачу квадратичной оптимизации с линейным ограничением и ее решение, предложенное в [33]. Это приложение интересно тем, что в нем используются как бесконечные, так и бесконечно малые числа. В задаче необходимо найти минимум:

$$\min_x \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2$$

при наличии линейного ограничения $x_1 + x_2 = 1$.

Один из традиционных методов решения этой задачи — это освободиться от ограничения, используя метод штрафных функций. При этом получается безусловная задача:

$$\min_x \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 + \frac{P}{2}(1 - x_1 - x_2)^2.$$

Сложность этого метода заключается в том, что при решении безусловной задачи численно неясно, как выбрать значение параметра P. Например, выбирая $P = 20$, мы получаем условия оптимальности первого порядка:

$$\begin{cases} x_1 - 20(1 - x_1 - x_2) = 0, \\ \frac{1}{3}x_2 - 20(1 - x_1 - x_2) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, мы получаем стационарную точку безусловной задачи:

$$x_1^*(20) = \frac{20}{81}, \quad x_2^*(20) = \frac{60}{81},$$

и неясно, как получить решение исходной задачи с ограничениями из этого решения. Поэтому на практике данная задача решается несколько раз для разных значений P для того, чтобы понять, к какому вектору сходится последовательность решений при возрастающих значениях P, и таким образом получить некоторое приближенное решение исходной задачи с ограничением.

Теперь посмотрим, что произойдет, если мы выберем $P = ①$. Тогда решение линейной системы, соответствующее условиям оптимальности первого порядка, есть:

$$x_1^*(①) = \frac{1①}{1 + 4①},$$
$$x_2^*(①) = \frac{3①}{1 + 4①}.$$

Выполнив деление, мы видим, что оба результата состоят из конечной части и нескольких бесконечно малых частей:

$$x_1^*(①) = \frac{1}{4} - ①^{-1}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}①^{-1} + \ldots\right),$$
$$x_2^*(①) = \frac{3}{4} - ①^{-1}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}①^{-1} + \ldots\right).$$

Как показывают авторы [33], конечные части чисел $x_1^*(①)$ е $x_2^*(①)$ дают нам точное решение исходной задачи с ограничениями, т. е. $x_1^* = \frac{1}{4}$, $x_2^* = \frac{3}{4}$. Таким образом, использование в качестве штрафного коэффициента ① дает нам следующее:

1) вместо многократного решения ряда безусловных задач с разными конечными значениями P безусловная задача решается только один раз;
2) вместо приближенного решения, получаемого традиционными методами, применение КБ дает точное решение.

7. Заключение

Большие вычислительные возможности и доступность новой суперкомпьютерной методологии привели к росту интереса к ней не только среди исследователей, но и среди преподавателей университетов и колледжей в Италии, Великобритании, Индии и США. В частности, работы [20–22] посвящены анализу первых результатов, касающихся преподавания методологии, а интернет-страница [23], разработанная профессором Давидэ Рицца из университета Восточной Англии в г. Норидж (University of East Anglia, Norwich, UK), содержит набор методических материалов, доступных для скачивания. В частности, сайт бесплатно предлагает 100-страничный сборник задач и упражнений, уже апробированный в колледжах Англии и лицеях Италии. Сборник доступен на английском и итальянском языках, готовится его перевод на испанский. На фото представлены профессор Д. Рицца, сотрудница Института высокопроизводительных вычислений и сетей Итальянского Научного Совета (аналог Российской академии наук) А. Асторино (см. ее работу [45]) и учитель Ф. Странджес вместе с учащимися лицея г. Сан-Джованни-ин-Фиоре, Италия. Фотография была сделана после занятий, во время которых проводилась апробация методологии.

Приведем несколько характерных ответов на некоторые из вопросов анкеты (см. [23]), которую учащиеся и учителя заполняли после знакомства с новой методологией во время занятий, проводимых профессором Рицца.

Вопрос учащимся: «Что вы думаете о бесконечности после занятия, проведенного с использованием новой методологии?»

Ответы:

Ученик А. Гроссуан позволяет нам упростить работу с бесконечностью, он дает нам возможность проводить вычисления с использованием этого понятия.

Ученик Б. Упрощение, конечно, потому что гроссуан позволяет нам производить вычисления.

Ученик В. Это практический подход. Бесконечность обычно является только теоретическим понятием, тогда как таким образом она действительно стала более практической.

Вопрос учителям: «Каково ваше мнение о проведенном занятии и об упражнениях, выполненных учащимися?»

Ответы:

Учитель А. Замечательно! Мне нравится идея использовать гроссуан привычным способом, в отличие от понятия ∞. Упражнения заставляют потрудиться, но они могут быть решены и удивительно полезны. Они помогают прояснить введенные концепции.

Учитель Б. Выполняя задания, студенты активно обсуждали их друг с другом на протяжении всего занятия и успешно решили предложенные упражнения.

Учитель В. Очень доступно, даже без предварительной подготовки. Вопросы хорошо структурированы с расчетом на повышение сложности.

* * *

Таким образом, описанная в статье методология не только является мощным вычислительным и методологическим инструментом, но и предлагает новый взгляд на преподавание математики и информатики. Учащиеся школ и студенты высших учебных заведений получают возможность иначе взглянуть на традиционные и, как считалось ранее, полностью сформировавшиеся разделы этих дисциплин. Полезность альтернативных точек зрения не вызывает сомнения, поскольку хорошо известно [46], что умение посмотреть на вещи с разных позиций чрезвычайно важно для развития критического мышления и метакогниции, являющихся ключевыми компетенциями современного человека.

Список источников / References

1. *Лапчик М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К.* Эволюция математического образования в условиях информатизации: обзор тенденций и результатов. *Наука о человеке: гуманитарные исследования.* 2020;14(3):71–79. DOI: 10.17238/issn1998-5320.2020.14.3.8

Lapchik M. P., Ragulina M. I., Khenner E. K. Mathematical education evolution in the context of informatization: Trends and results reviews. *The Science of Person: Humanitarian Researches.* 2020;14(3):71–79. DOI: 10.17238/issn1998-5320.2020.14.3.8

2. *Носков М. В., Попова В. В.* Реализация межпредметных связей математики и информатики в современном учебном процессе. *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева.* 2015;(1(31)):65–68.

Noskov M. V., Popova V. V. The implementation of intersubject communications between mathematics and computer science in the modern educational process. *Bulletin of the Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V. P. Astafiev.* 2015;(1(31)):65–68.

3. *Лапчик М. П.* Теоретические и организационные вопросы информатизации школьного и педагогического образования. *Современные проблемы информатизации образования.* Омск; 2017. С. 43–110.

Lapchik M. P. Theoretical and organizational issues of informatization of school and pedagogical education. *Modern problems of informatization of education.* Omsk; 2017. P. 43–110.

4. *Григорьев С. Г., Гриншкун В. В.* Подготовка магистров по программе «Информационные технологии в образовании» в МГПУ — новое направление, новые возможности. *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования.* 2013;(2):5–13.

Grigoriev S. G., Grinshkun V. V. Training of masters in the program "Information technologies in education" at the Moscow State Pedagogical University — a new direction, new opportunities. *Bulletin of People's Friendship University of Russia. Series: Informatization of Education.* 2013;(2):5–13.

5. *Григорьев С. Г., Подболотова М. И.* Моделирование углубленной профессионально-ориентированной практики магистрантов в условиях модульного обучения и сетевого взаимодействия по направлению подготовки «Педагогическое образование». *Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования.* 2015;(2(32)):8–25.

Grigoriev S. G., Podbolotova M. I. Modeling of in-depth professionally-oriented practice of undergraduates in the context of modular training and network interaction in the direction of training "Pedagogical education". *Vestnik of Moscow City University. Series: Informatization of Education.* 2015;(2(32)):8–25.

6. *Белова Т. В.* О совершенствовании методики преподавания дисциплины «Математика и информатика» за счет использования межпредметных связей. *Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования.* 2006;(7):25–28.

Belova T. V. On improving the teaching methods of the discipline "Mathematics and Informatics" through the use of intersubject connections. *Vestnik of Moscow City University. Series: Informatization of Education.* 2006;(7):25–28.

7. *Сафонов В. И.* Подготовка учителей к преподаванию математики с использованием методов информатики. *Электронное обучение в непрерывном образовании — 2018. V Международная научно-практическая конференция.* 2018. С. 686–690.

Safonov V. I. Preparation of teachers for teaching mathematics using informatics methods. E-Learning in Continuing Education — 2018. *Proc. 5th Int. Scientific and Practical Conf.* 2018. P. 686–690.

8. *Пардала А.* Информатизация математического образования: дидактические возможности, опыт и зарубежные тенденции. *Информатика и образование.* 2019;34(6):49–55. DOI: 10.32517/0234-0453-2019-34-6-49-55

Pardała A. Informatization of mathematics education: Didactic opportunities, experience and foreign trends. *Informatics and Education.* 2019;34(6):49–55. DOI: 10.32517/0234-0453-2019-34-6-49-55

9. *Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург; 2004. 608 с.

Voevodin V. V., Voevodin Vl. V. Parallel computing. Saint Petersburg, BHV-Petersburg; 2004. 608 p.

10. *Гергель В. П.* Теория и практика параллельных вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2017. 423 с.

Gergel V. P. Theory and practice of parallel computing. Moscow, BINOM. Laboratoriya znanij; 2017. 423 p.

11. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир; 2006. 824 с.

Nielsen M., Chang I. Quantum computing and quantum information. Moscow, Mir; 2006. 824 p.

12. Numerical Infinity and the Infinity Computer. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com

13. *Lolli G.* Infinitesimals and infinites in the history of mathematics: A brief survey. *Applied Mathematics and Computation.* 2012;218(16):7979–7988. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Lolli_paper.pdf

14. *Lolli G.* Metamathematical investigations on the theory of grossone. *Applied Mathematics and Computation.* 2015;255:3–14. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Lolli_2_web.pdf

15. *Margenstern M.* Using grossone to count the number of elements of infinite sets and the connection with bijections. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications.* 2011;3(3):196–204. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/MM_bijection.pdf

16. *Montagna F., Simi G., Sorbi A.* Taking the Pirahã seriously. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2015;21(1-3):52–69. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Sorbi_web.pdf

17. *Rizza D.* A study of mathematical determination through Bertrand's Paradox. *Philosophia Mathematica.* 2018;26(3):375–395. DOI: 10.1093/philmat/nkx035. Available at: https://academic.oup.com/philmat/article/26/3/375/4753688

18. *Sergeyev Ya. D.* Numerical infinities and infinitesimals: Methodology, applications, and repercussions on two Hilbert problems. *EMS Surveys in Mathematical Sciences.* 2017;4(2):219–320. DOI: 10.4171/EMSS/4-2-3. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/EMSS_Sergeyev.pdf

19. *Caldarola F., Cortese D., d'Atri G., Maiolo M.* Paradoxes of the Infinite and Ontological Dilemmas Between Ancient Philosophy and Modern Mathematical Solutions. *Lecture Notes in Computer Science.* 2020;(LNCS 11973):358–372. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Caldarola_Paradoxes_2020.pdf

20. *Antoniotti L., Caldarola F., d'Atri G., Pellegrini M.* New approaches to basic calculus: An experimentation via numerical computation. *Lecture Notes in Computer Science.* 2020;(LNCS 11973):329–342. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Antoniotti_et_al_2020.pdf

21. *Ingarozza F., Adamo M. T., Martino M., Piscitelli A.* A grossone-based numerical model for computations with infinity: A case study in an Italian high school. *Lecture Notes in Computer Science.* 2020;(LNCS 11973):451–462. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Ingarozza_et_al_2020.pdf

22. *Iannone P., Rizza D., Thoma A.* Investigating secondary school students' epistemologies through a class activity concerning infinity. *Proc. 42nd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2018;3:131–138. Available at: https://www.researchgate.net/publication/326353757_INVESTIGATING_SECONDARY_SCHOOL_STUDENTS'_EPISTEMOLOGIES_THROUGH_A_CLASS_ACTIVITY_CONCERNING_INFINITY

23. Numerical Infinities. Available at: https://www.numericalinfinities.com

24. *Robinson A.* Non-standard analysis. Princeton University Press; 1996. 308 p.

25. *Artigue M.* Analysis. *Advanced Mathematical Thinking* (ed. D. Tall). NY, Springer; 1994. P. 167–198. DOI:10.1007/0-306-47203-1

26. *Pepelyshev A., Zhigljavsky A.* Discrete uniform and binomial distributions with infinite support. *Soft Computing.* 2020;24:17517–17524. DOI:10.1007/s00500-020-05190-2

27. *Calude C. S., Dumitrescu M.* Infinitesimal probabilities based on grossone. *SN Computer Science.* 2020;1:36. DOI: 10.1007/s42979-019-0042-8

28. *D'Alotto L.* Infinite games on finite graphs using grossone. *Soft Computing.* 2020;24:17509-17515. DOI:10.1007/s00500-020-05167-1

29. *Rizza D.* Numerical methods for infinite decision-making processes. *International Journal of Unconventional Computing.* 2019;14(2):139–158. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/ijuc.pdf

30. *Fiaschi L., Cococcioni M.* Numerical asymptotic results in Game Theory using Sergeyev's Infinity Computing. *International Journal of Unconventional Computing*. 2018;14(1):1–25. Available at: https://arxiv.org/abs/1808.00738

31. *Amodio P., Iavernaro F., Mazzia F., Mukhametzhanov M. S., Sergeyev Ya. D.* A generalized Taylor method of order three for the solution of initial value problems in standard and infinity floating-point arithmetic. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2017;141:24–39. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/gross_taylor.pdf

32. *Iavernaro F., Mazzia F., Mukhametzhanov M. S., Sergeyev Ya. D.* Computation of higher order Lie derivatives on the Infinity Computer. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2021;383:113135, DOI: 10.1016/j.cam.2020.113135

33. *De Cosmis S., De Leone R.* The use of grossone in mathematical programming and operations research. *Applied Mathematics and Computation*. 2012;218(16):8029–8038. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Renato_final.pdf

34. *Lai L., Fiaschi L., Cococcioni M.* Solving mixed Pareto-lexicographic multi-objective optimization problems: The case of priority chains. *Swarm and Evolutionary Computation*. 2020;55:100687. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Lai_et_al2020.pdf

35. *Сочков А. Л.* Философские аспекты новейшей арифметики бесконечности. *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Социальные науки*. 2009;(3(15)):72–77.

Sochkov A. L. Philosophical aspects of the latest arithmetic of infinity. *Bulletin of the Lobachevsky State University. Series: Social Sciences*. 2009;(3(15)):72–77.

36. *Caldarola F.* The Sierpinski curve viewed by numerical computations with infinities and infinitesimals. *Applied Mathematics and Computation*. 2018;318:321–328. DOI: 10.1016/j.amc.2017.06.024

37. *Gordon P.* Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science*. 2004:306(15):496–499. DOI: 10.1126/science.1094492

38. *Эверетт Д. Л.* Не спи, кругом змеи! Быт и язык индейцев американских джунглей. М.: Языки славянских культур; 2016. 384 с.

Everett D. L. Don't sleep, there are snakes: Life and language in the Amazonian jungle. Moscow, Languages of Slavic cultures; 2016. 384 p.

39. *Кронгауз М. А.* Дэниел Эверетт и Бенджамин Уорф: лингвистические и нелингвистические параллели. *Российский журнал когнитивной науки*. 2018;5(1):14–21.

Режим доступа: https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/direct/225302168.pdf

Krongauz M. A. Daniel Everett and Benjamin Whorf: Linguistic and NonLinguistic Parallels. *The Russian Journal of Cognitive Science*. 2018;5(1):14–21.

Available at: https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/direct/225302168.pdf

40. *Кибрик А. А.* Тирания чужого ума. *Российский журнал когнитивной науки*. 2018;5(1):27–36. Режим доступа: https://cogjournal.ru/5/1/pdf/KibrikRJCS2018.pdf

Kibrik A. A. Tyranny of another mind. *The Russian Journal of Cognitive Science*. 2018;5(1):27–36. Available at: https://cogjournal.ru/5/1/pdf/KibrikRJCS2018.pdf

41. *Comrie B.* Numeral bases. *The world atlas of language structures online*. Leipzig: Max Planck Institute for Evolutionary Anthropology; 2013. Available at: http://wals.info/chapter/131

42. *Pica P., Lemer C., Izard V., Dehaene S.* Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*. 2004;306(15):499–503.

43. *Zhigljavsky A.* Computing sums of conditionally convergent and divergent series using the concept of grossone. *Applied Mathematics and Computation*. 2012;218:8064–8076. DOI: 10.1016/j.amc.2011.12.034

44. *Sergeyev Ya. D.* Higher order numerical differentiation on the Infinity Computer. *Optimization Letters*. 2011;5(4):575–585. Available at: https://www.theinfinitycomputer.com/wp-content/uploads/2020/11/Num_dif.pdf

45. *Astorino A., Fuduli A.* Spherical separation with infinitely far center. *Soft Computing*. 2020; 24:17751–17759. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s00500-020-05352-2

46. *Литвинов А. В., Иволина Т. В.* Метакогниция: Понятие, структура, связь с интеллектуальными и когнитивными способностями (по материалам зарубежных исследований). *Современная зарубежная психология*. 2013;2(3):59–70. Режим доступа: https://psyjournals.ru/files/63502/jmfp_2013_3_n4_Litvinov.pdf

Litvinov A. V., Ivolina T. V. Metacognition: Concept, structure, association with intellect and cognitive processes. *Journal of Modern Foreign Psychology*. 2013;2(3):59–70. Available at: https://psyjournals.ru/files/63502/jmfp_2013_3_n4_Litvinov.pdf

Информация об авторе

Сергеев Ярослав Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, выдающийся профессор, директор лаборатории численного анализа, Университет Калабрии, г. Козенца, Италия; профессор кафедры математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия; *ORCID:* http://orcid.org/0000-0002-1429-069X; *e-mail:* yaro@dimes.unical.it

Information about the author

Yaroslav D. Sergeyev, Ph.D., Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Distinguished Professor, Head of Numerical Calculus Laboratory, University of Calabria, Cosenza, Italy; Professor at the Department of Mathematical Software and Supercomputing Technologies, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia; *ORCID:* http://orcid.org/0000-0002-1429-069X; *e-mail:* yaro@dimes.unical.it

Поступила в редакцию / Received: 10.03.2021.
Поступила после рецензирования / Revised: 02.04.2021.
Принята к печати / Accepted: 06.04.2021.